Homotopietheorie der Koinzidenzpunkte

I N A U G U R A L - D I S S E R T A T I O N
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Johann-Wolfgang-Goethe-Universität
Frankfurt am Main

Kennziffer D 30

vorgelegt von
Herbert Nickelsen

Frankfurt am Main 1954

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

Zusammenfassung:

Wird ein endlicher n-dimensionaler topologischer Kompl
$\mathfrak{M}$ durch zwei stetige Abbildungen f und g in einen zwe
ten n-dimensionalen Komplex $\mathfrak{N}$ abgebildet, so heißen Pu
p von $\mathfrak{M}$ mit f(p) = g (p) Koinzidenzpunkte von f und g.
$\mathfrak{G} = \{\gamma\}$ und $\mathfrak{H} = \{\delta\}$ seien die auf je einen Aufpunkt bez
nen Fundamentalgruppen, $\mathfrak{M}^*$ und $\mathfrak{N}^*$ die universellen Überl
rungen von $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{N}$, f^* und g^* zwei überlagernde Abbi
gen von f bzw. g. f^* und g^* induzieren zwei bestimmte
morphismen F und G von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{H}$. Bezüglich F, G zerfäl
$\mathfrak{H}$ in Klassen: δ_1 und δ_2 heißen "F-G-konjugiert", wenn e
ein γ aus $\mathfrak{G}$ mit $\delta_2 = F(\gamma)\,\delta_1\,G(\gamma^{-1})$ gibt. Spezielle
le dieses rein gruppentheoretischen Begriffes ergeben
üblichen Klassen konjugierter Elemente einer Gruppe u
die Rechts- und Linksrestklassen einer Gruppe nach ei
Untergruppe. Auch die Koinzidenzpunktmenge $\mathfrak{K}$ von f u
g zerfällt in Klassen: Sei $\langle\delta\rangle$ irgendeine F-G-Klasse,
$\delta_1^{-1}\delta_2$ ein beliebiger Repräsentant derselben, dann bil
die nach $\mathfrak{M}$ projizierten Koinzidenzpunkte von $\delta_1 f^*, \delta_2 g^*$ ein
le, gegebenenfalls leere Koinzidenzpunktklasse $\mathfrak{K}\langle\delta\rangle$
Durchläuft $\delta_1^{-1}\delta_2$ ein volles Repräsentantensystem der F-
Klassen, dann bilden die $\mathfrak{K}\langle\delta\rangle$ eine Klasseneinteilung v
$\mathfrak{K}$. Nur endlich viele $\mathfrak{K}\langle\delta\rangle$ enthalten Koinzidenzpunkte
Die Klassen $\mathfrak{K}\langle\delta\rangle$ von $\mathfrak{K}$ sind den Klassen $\langle\delta\rangle$ von $\mathfrak{H}$ eine
deutig zugeordnet. Diese Zuordnung bleibt bei einer b
bigen Deformation von f und g erhalten, wenn man f^*,
sprechend mitdeformiert. Seien $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ orientierte Ma
tigkeiten. Mit Hilfe zweier simplizialer ε-Approximat
f_0, g_0 von f und g wird wie folgt eine Spureninvarian
algebraisch konstruiert, aus der sich die Lefschetzsc
Zahl Λ und die Reidemeistersche Spureninvariante durc
zialisierung auf Fixpunkte ergeben. Seien M und N die
g_0 entsprechenden Simplizialzerlegungen von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$
$\bar{M}$ und $\bar{N}$ die dualen Zellenzerlegungen. Zwischen den Ho
topiekettengruppen von M und $\bar{M}$, ebenso zwischen den H
topiekettengruppen von N und $\bar{N}$ bestehen gewisse Überl
rungshomomorphismen. Mit ihrer Hilfe wird die g_0 über
gernde Abbildung g_0^* in ein System $\tilde{g}^*$ von Kettenhomom
phismen von $\bar{M}^*$ nach $\bar{N}^*$ überführt. Wählt man in M^* und
eine "Grundbasis", bestehend aus je einem M^*- bzw. N^*
Simplex über jedem M- bzw. N-Simplex, dann lassen sic

und g^* durch je n+1 Gruppenringmatrizen $\mathfrak{A}_k$, $\mathfrak{B}_k$ über $\mathfrak{H}$ beschreiben. Die "transponierte" Gruppenringmatrix $\mathfrak{B}_k^T$ erhält man aus $\mathfrak{B}_k$, indem man $\mathfrak{B}_k$ wie üblich transponiert und sämtliche Gruppenelemente durch ihre inversen ersetzt. Substituiert man in der Spurenwechselsumme

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \, Sp\, \mathfrak{A}_k \mathfrak{B}_{n-k}^T$$

jedes Gruppenelement durch seine F-G-Klasse, so erhält man die ganzzahlige Linearform in F-G-Klassen:

$$(1) \qquad \Lambda^*(f_0^*, g_0^*) = \left\langle \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \, Sp\, \mathfrak{A}_k \mathfrak{B}_{n-k}^T \right\rangle$$

Λ^* ist von den gewählten Grundbasen unabhängig. Es gilt das Transformationsgesetz:

$$(2) \qquad \Lambda^*(\bar{\delta} f_0^*, \delta g_0^*) = \bar{\delta}\, \Lambda^*(f_0^*, g_0^*)\, \delta^{-1}.$$

Je zwei simpliziale ε-Deformationen von (f,g) liefern denselben Λ^*-Wert. Daher wird $\Lambda^*(f^*,g^*)$ zusamman mit (2) den stetigen Abbildungen f, g invariant zugeschrieben. Bezeichnet man, falls f und g nur isolierte Koinzidenzpunkte haben, mit $j\langle\delta\rangle$ die Summe der Indizes der Koinzidenzpunkte von $\mathfrak{K}\langle\delta\rangle$, dann gilt:

$$(3) \qquad \Lambda^*(f^*,g^*) = (-1)^n \sum_{\langle\delta\rangle} j\langle\delta\rangle\, \mathfrak{K}\langle\delta\rangle \,.$$

Die Deutung (3) kann auf den Fall beliebiger Abbildungen ausgedehnt werden, denn die linke und rechte Seite der Gleichung (3) erweisen sich als invariant gegenüber jeder stetigen Deformation von (f^*,g^*) über (f,g). Wesentliche Koinzidenzklassen, d.h. Klassen mit nicht verschwindendem Index, können bei keiner Deformation verschwinden. Gerade diese Klassen treten in Λ^* explizit auf. Ihre Anzahl μ und Indizes $j\langle\delta\rangle$ lassen sich aus Λ^* unmittelbar ablesen. Bei keiner Deformation von (f,g) können weniger als μ Koinzidenzpunkte auftreten.

Lebenslauf:

Am 13. März 1925 wurde ich, Herbert Nickelsen, als Sohn von Hans und Helene Nickelsen in Höchst am Main geboren. Ich besuchte von Ostern 1931 bis Ostern 1935 die Volksschule in Frankfurt (Main) - Höchst, von da bis Ostern 1940 die Karl von Weinberg-Mittelschule in Schwanheim und anschließend bis zum Abitur Ostern 1943 die Städtische Höchster Oberschule für Jungen.

Nach Ableistung der Arbeitsdienstpflicht studierte ich im Winter-Semester 1943/44 an der Frankfurter Universität Medizin. Ich wurde im Januar 1944 zur Wehrmacht eingezogen und im Juni 1945 aus amerikanischer Kriegsgefangenschaft entlassen.

Seit dem Winter-Semester 1946 studiere ich an der Johann Wolfgang Goethe-Universität zu Frankfurt am Main Mathematik und Physik. Im Oktober 1947 legte ich die Diplom-Vorprüfung, im April 1950 die Diplom-Hauptprüfung für Mathematiker ab. Im Juli 1950 unterzog ich mich der Staatsprüfung für das Höhere Lehramt. Anschließend wurde ich in Wiesbaden als Referendar ausgebildet. Seit Oktober 1952 bin ich am Liebig-Realgymnasium zu Frankfurt am Main als Studienassessor tätig.

1. Referent: Prof. Dr. W. Franz

2. Referent: Prof. Dr. R. Moufang

Tag der mündlichen Prüfung: 26. Juli 1954

54/186